

Si è visto come, per un circuito a parametri concentrati, lineare¹, tempoinvariante ed asintoticamente stabile², in regime sinusoidale, la relazione tra il fasore della tensione – o più in generale della forzante di ingresso – ed il fasore della corrente – o di altra grandezza di uscita – fosse un certo valore complesso.

Considereremo di qui in avanti sistemi SISO (Single Input Single Output), ovvero per ogni circuito descritto avremo una sola forzante ed una sola uscita. Quanto detto in precedenza ha validità generale: data una forzante sinusoidale, la grandezza che definiremo come uscita sarà sinusoidale di pari pulsazione della grandezza di ingresso. Il sistema non può generare in uscita frequenze non presenti in ingresso, ma solamente amplificare od attenuare (quindi anche annullare) e sfasare quelle presenti. Ciò valendo – lo ripeto – solamente per sistemi LTI (lineari tempoinvarianti).

La relazione tra uscita ed ingresso, in funzione di ω (dunque al variare di tutte le possibili pulsazioni del segnale) e, per forza di cose, per $\omega > 0$, viene detta risposta in frequenza del sistema (circuito):

$$G(j\omega) = \frac{\bar{O}ut(j\omega)}{\bar{I}n(j\omega)}$$

$G(j\omega)$ è anch'esso un numero complesso, quindi rappresentabile nel piano complesso in notazione modulo e fase:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$$

La funzione di risposta in frequenza descrive, in sostanza, il comportamento di un sistema sollecitato da ogni possibile ingresso sinusoidale. Tuttavia, in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti per sistemi lineari, la nozione di risposta in frequenza continua a valere anche per segnali non sinusoidali e non periodici: è valida per ogni funzione (periodica) che possa esser sviluppata in serie di Fourier, quindi approssimata quale sommatoria di termini sinusoidali, o per ogni altra funzione che ammetta trasformata di Fourier – non sorprenda sapere che sono qui comprese tutte le funzioni d'interesse pratico.

In sintesi, si è introdotto il concetto di risposta in frequenza in modo semplice, basandoci sulla teoria sui fasori precedentemente esposta, quindi si è precisato che è possibile considerare classi di segnali ben più ampie delle funzioni sinusoidali: la risposta in frequenza descrive ogni sistema LTI a parametri concentrati asintoticamente stabile a regime³ nei confronti delle diverse componenti armoniche della variabile di ingresso.

Si consiglia vivamente di approfondire la nozione di Trasformata di Fourier.

Per la seguente trattazione, date le motivazioni appena accennate, di qui in avanti considereremo $\bar{I}$ e $\bar{V}$ non più come fasori, ma come trasformata di Fourier di $i(t)$ e $v(t)$ rispettivamente. Nel caso di semplici forzanti sinusoidali si ribadisce che le due grandezze, trasformata e fasore, coincidono in quanto ad utilizzo nello specifico.

¹ Nella pratica: un qualsivoglia circuito elettrotecnico contenente generatori indipendenti, resistori, induttori, condensatori, trasformatori ideali, amplificatori operazionali (modello lineare) ed induttori accoppiati.

² Nella pratica: ogni circuito reale dissipativo.

³ La quantificazione del tempo necessario affinché il sistema sia considerato a regime non può essere determinata dalla sola conoscenza della funzione di risposta in frequenza, ma, in generale, dalla risoluzione delle equazioni differenziali che lo governano.

Si dà il seguente teorema fondamentale; le ipotesi sono le medesime di cui sopra.

Sia $In(t) = In_{MAX} \sin(\omega_0 t + \varphi)$ la grandezza in ingresso al circuito.

L'uscita a regime vale:

$$Out(t) = Out_{MAX} \sin(\omega_0 t + \varphi + \vartheta)$$

con:

$$Out_{MAX} = In_{MAX} |G(j\omega_0)|, \text{ ampiezza massima}$$

$$\vartheta = \angle G(j\omega_0), \text{ sfasamento aggiuntivo.}$$

Per ogni condizione iniziale.

Nulla di nuovo: si è solamente formalizzato quanto già visto negli esempi de “Il regime sinusoidale”.

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

La forma più utilizzata per la rappresentazione della risposta in frequenza è costituita dai diagrammi di Bode, diagrammi che rappresentano, in funzione della pulsazione o della frequenza, il modulo e la fase di $G(j\omega)$.

In tali diagrammi la scala dei valori in ascissa è logaritmica di base 10.

Il diagramma del modulo della funzione di risposta in frequenza riporta sulle ordinate, in scala lineare, il valore di $|G(j\omega)|$ in decibel (dB). Per convenzione: $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$. Da tale definizione si evince come valori maggiori, minori od uguali a zero della grandezza in dB corrispondano rispettivamente a valori maggiori, minori od uguali ad uno del modulo.

Nel diagramma della fase, le ordinate riportano il valore dell'argomento della funzione di risposta in frequenza, valore espresso in gradi o radianti ed in scala lineare.

I diagrammi di modulo e fase della risposta in frequenza forniscono rispettivamente la descrizione dell'amplificazione e dello sfasamento che il sistema produce nei riguardi delle diverse armoniche del segnale di ingresso.

Nota

I diagrammi presentati nel seguito sono stati disegnati tramite appositi software. A tal proposito, va ricordato che esistono tecniche per il tracciamento manuale dei diagrammi di Bode approssimati – di cui in questa sede non si dà cenno.

I FILTRI PASSIVI

Ogni circuito reale si comporta come filtro nei confronti del segnale di ingresso in quanto ne modifica lo spettro in accordo con la propria risposta in frequenza.

Filtro passivo passa basso

Un filtro passivo passa basso è un circuito passivo che “lascia sostanzialmente passare” le armoniche del segnale di ingresso di frequenza inferiore ad una frequenza data (chiamata frequenza di taglio, f_T) ed attenua od elimina le rimanenti. Identicamente possiamo riferirci alla pulsazione.

Poiché nella pratica non è possibile che il modulo della funzione di risposta in frequenza sia discontinuo, cioè non è possibile che questo si annulli per tutti gli $f > f_T$ avendo invece valore non nullo per tutti gli $f \leq f_T$, si definisce frequenza di taglio di un filtro reale la frequenza alla quale, in termini semplici, l'ampiezza massima⁴ della grandezza fisica in uscita è attenuata di $\sqrt{2}$ volte.

Ovvero: la pulsazione di taglio ω_T per un filtro passa basso è la pulsazione che rende vera la seguente:

$$\frac{|G(j\omega_T)|}{|G(j0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

con $|G(j0)|$ guadagno del filtro passa basso.

Di qui si ricava f_T .

L'intervallo $[0, f_T]$ (oppure $[0, \omega_T]$) è definito banda passante del sistema. Più è larga la banda passante, più l'uscita assomiglia, eventualmente moltiplicata per un valore costante, all'ingresso. Un sistema a banda larga è altresì un sistema “veloce”. Affinché si abbia una fedele ricostruzione del segnale in ingresso è importante, inoltre, non avere significative distorsioni di fase.

La pendenza di un filtro si misura in dB/ottava ed indica di quanti dB diminuisce la grandezza di uscita, nell'intorno della f_T ed in funzione della frequenza, in un'ottava, cioè ad un raddoppio della frequenza stessa.

PENDENZA DEL DIAGRAMMA DEL MODULO	ORDINE DEL FILTRO PASSIVO
6 dB/ottava	1 (un elemento dinamico)
12 dB/ottava	2 (due elementi dinamici, non degeneri)
18 dB/ottava	3 (tre elementi dinamici, non degeneri)
24 dB/ottava	4 (quattro elementi dinamici, non degeneri)
etc...	

⁴ Escludendo l'eventuale risonanza.

Filtro passivo passa alto

Un filtro passivo passa alto è un circuito passivo che “lascia passare” le armoniche del segnale di ingresso di frequenza maggiore della f_T ed attenua od elimina le rimanenti. Identicamente possiamo riferirci alla pulsazione.

Come per i filtri passa basso, si definisce frequenza di taglio di un filtro reale la frequenza alla quale l'ampiezza massima della grandezza fisica in uscita è attenuata di $\sqrt{2}$ volte.

Per un filtro passa alto, la pulsazione di taglio ω_T è la pulsazione che rende vera la seguente:

$$\frac{|G(j\omega_T)|}{|G(j\infty)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

con $|G(j\infty)|$ guadagno del filtro passa alto (se e solo se non nullo), inteso nel senso di limite. Di qui si ricava f_T .

$[f_T, +\infty)$ oppure $[\omega_T, +\infty)$ è la banda passante del circuito.

Filtro passivo passa banda

Un filtro passivo passa banda è un circuito passivo che “lascia passare” le armoniche del segnale di ingresso di frequenza compresa tra le sue frequenze di taglio ed attenua od elimina le rimanenti.

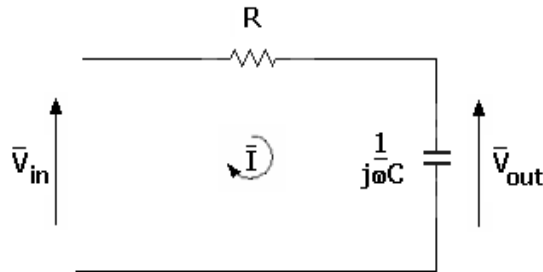
Filtro passivo di notch od a spillo

Un filtro passivo a spillo è un circuito in grado di arrestare unicamente una (stretta) banda di frequenze centrate attorno ad una frequenza data.

ALCUNI SEMPLICI ESEMPI DI FILTRI PASSIVI

Filtro passivo passa basso RC (primo ordine)

Un tipico circuito passa basso di tipo RC è il seguente, in cui la variabile di uscita è rappresentata dalla tensione sul condensatore:



Di per sé, possiamo pensare al condensatore come ad un componente in grado di lasciar passare inalterate le armoniche di “alta” frequenza ed in grado di eliminare quelle di “bassa” frequenza, dipendentemente appunto dalla sua capacità C (fissata R). Più la capacità è piccola, più il condensatore riesce a “ricostruire” il suo ingresso in tensione.

Nel circuito di cui sopra il condensatore pone in corto verso massa queste alte frequenze, restituendo in uscita solamente le frequenze basse.

Lo studio circuitale impone:

$$\bar{V}_{in} = (R + \frac{1}{j\omega C})\bar{I}$$

$$\bar{V}_{out} = \frac{1}{j\omega C}\bar{I}$$

Di qui:

$$G(j\omega) = \frac{\bar{V}_{out}}{\bar{V}_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Modulo e fase di tale numero complesso sono rispettivamente:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \arctg(-\omega RC)$$

Il circuito non presenta risonanza.

La pulsazione di taglio, come detto, è la pulsazione alla quale il modulo della grandezza di uscita viene attenuato di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al suo valore massimo. Poiché nel circuito in esame il guadagno del filtro è unitario, tale ampiezza massima coincide con quella della grandezza in ingresso. In riferimento al modulo della risposta in frequenza, quanto detto coincide quindi matematicamente con:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1 - \omega^2 R^2 C^2}{2(1 + \omega^2 R^2 C^2)} = 0 \Rightarrow \omega^2 R^2 C^2 = 1$$

Essendo $R > 0; C > 0$, si ricava facilmente:

$$\omega_T = \frac{1}{RC} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \Rightarrow f_T = \frac{1}{2\pi RC} [\text{Hz}]$$

Si notano due cose:

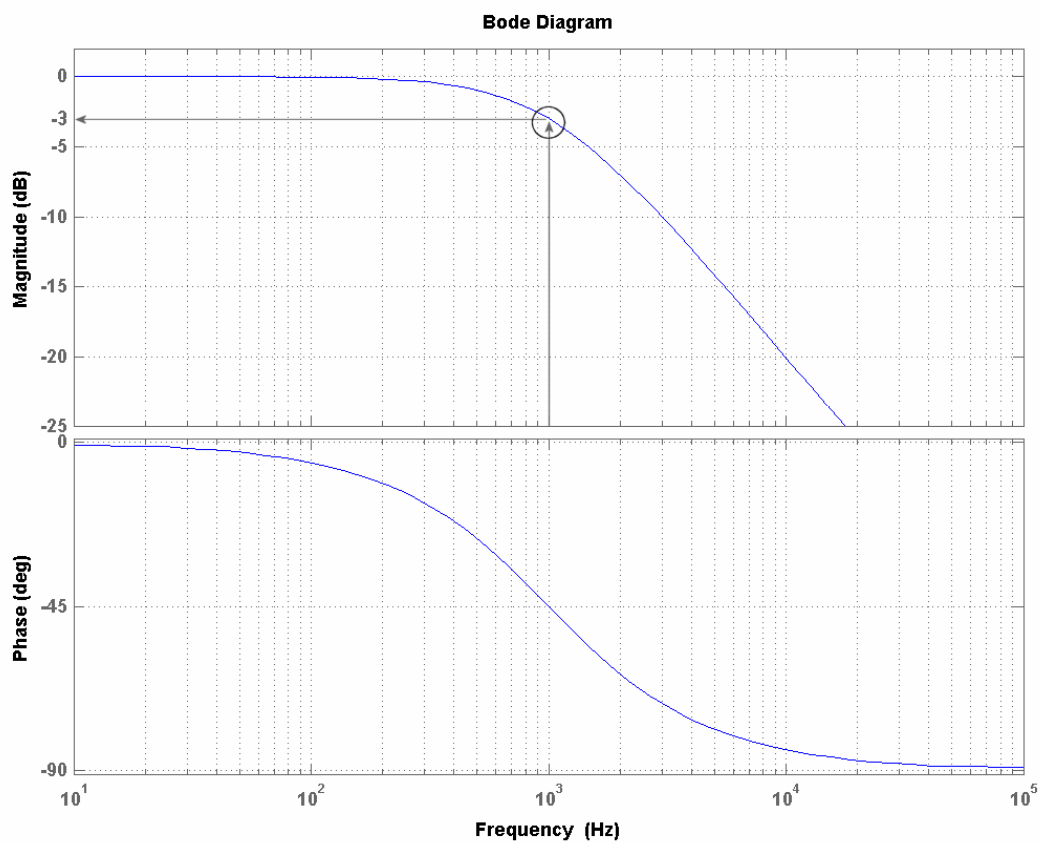
- ✓ la pulsazione di taglio coincide con l'inverso della costante di tempo del circuito stesso;
- ✓ in ω_T la fase della risposta in frequenza vale $-\frac{\pi}{4} = -45^\circ$.

Esempio

I diagrammi di Bode (reali) di modulo e fase per:

$$f_T = 1000 \text{ Hz} \Rightarrow RC = \frac{1}{2000\pi}$$

sono i seguenti⁵:



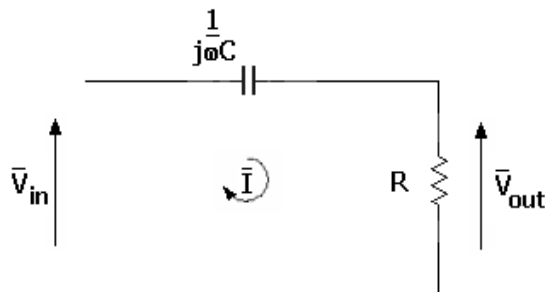
⁵ Software utilizzato: *Matlab 6.5*

Notiamo che:

- ✓ i grafici sono in scala logaritmica in ascissa e lineare in ordinata, rispettivamente in dB quello del modulo ed in gradi quello della fase. La scala logaritmica è qui espressa in Hz; spesso viene espressa in rad/s;
- ✓ 0 dB corrisponde a guadagno unitario (rispetto alla grandezza di ingresso);
- ✓ il valore del modulo alla frequenza di taglio vale -3 dB, ovvero $\frac{1}{\sqrt{2}}$ volte il suo valore massimo;
- ✓ il circuito in esame rappresenta quindi un filtro passa basso del primo ordine; notiamo che l'andamento del modulo cala di 6 dB per ottava nell'intorno della frequenza (pulsazione) di taglio.

Filtro passivo passa alto RC (primo ordine)

Un tipico circuito passa alto di tipo RC è il seguente, in cui la variabile di uscita è rappresentata dalla tensione sul resistore. Il condensatore è posto in serie tra ingresso ed uscita, ciò implicando che le “basse” frequenze vengono attenuate od eliminate dallo stesso.



Lo studio circuitale impone:

$$\bar{V}_{in} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \bar{I}$$

$$\bar{V}_{out} = R \bar{I}$$

Di qui:

$$G(j\omega) = \frac{\bar{V}_{out}}{\bar{V}_{in}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Modulo e fase di tale numero complesso sono rispettivamente:

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Il circuito non presenta risonanza.

La pulsazione di taglio vale:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_T = \frac{1}{2\pi RC} [Hz]$$

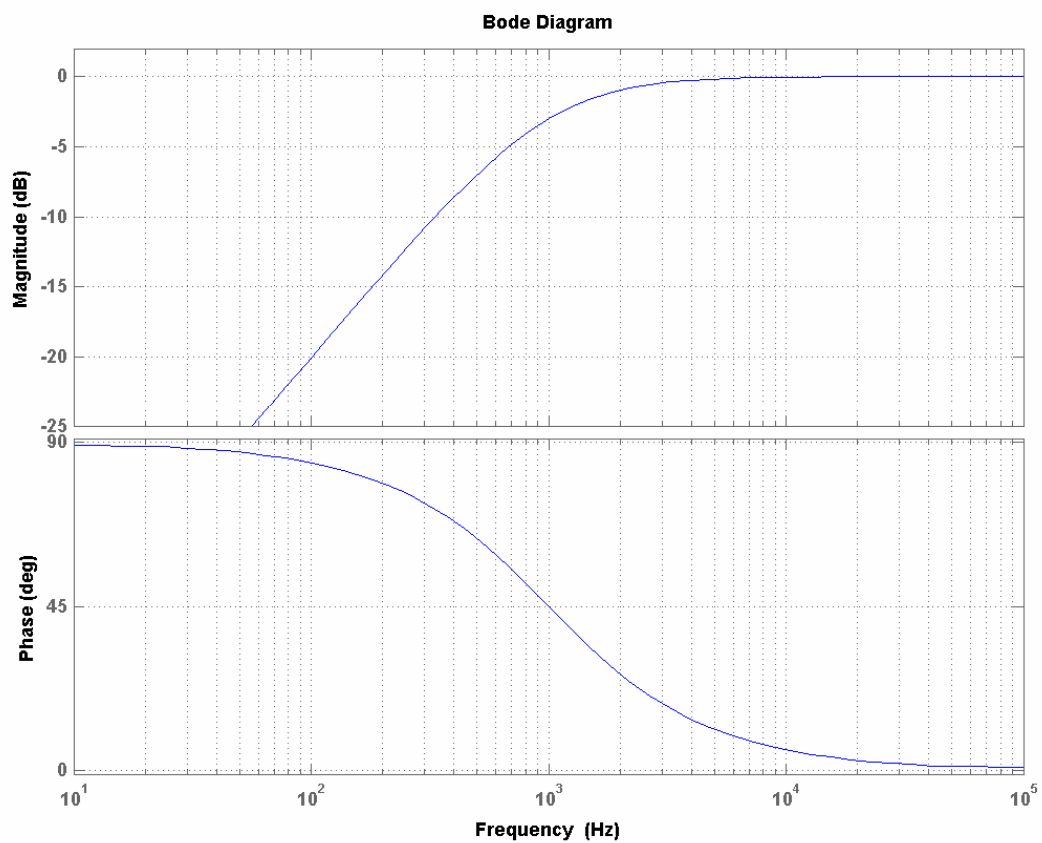
Si nota che la pulsazione di taglio coincide con l'inverso della costante di tempo del circuito stesso.

Esempio

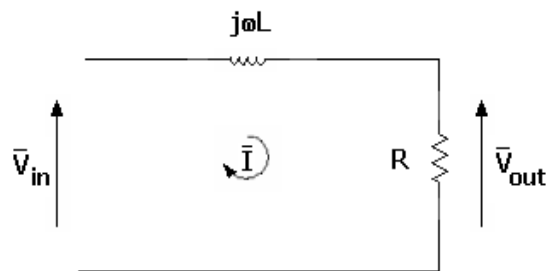
I diagrammi di Bode (reali) di modulo e fase per:

$$f_T = 1000 Hz \Rightarrow RC = \frac{1}{2000\pi}$$

sono i seguenti:



Filtro passivo passa basso RL (primo ordine)



Di per sé, possiamo pensare all'induttore come ad un componente in grado di lasciar passare inalterate le armoniche di "bassa" frequenza ed in grado di eliminare quelle di "alta" frequenza, dipendentemente appunto da L (fissata R). Più L è piccola, meno l'induttore si oppone al passaggio del suo ingresso in corrente.

Abbiamo:

$$\bar{V}_{in} = (R + j\omega L)\bar{I}$$

$$\bar{V}_{out} = R\bar{I}$$

Di qui:

$$G(j\omega) = \frac{\bar{V}_{out}}{\bar{V}_{in}} = \frac{R}{R + j\omega L}$$

Modulo e fase di tale numero complesso sono rispettivamente:

$$|G(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \arctg\left(-\frac{\omega L}{R}\right)$$

Il circuito non presenta risonanza.

La pulsazione di taglio vale:

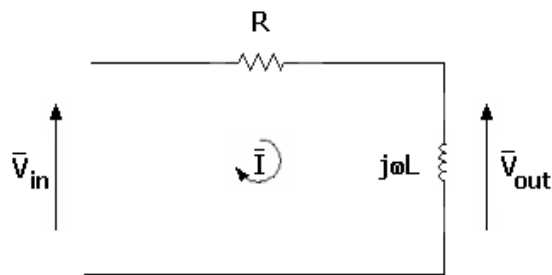
$$|G(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega^2 L^2 = R^2$$

Essendo $R > 0; L > 0$, si ricava facilmente:

$$\omega_T = \frac{R}{L} \Rightarrow f_T = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}$$

Si nota che la pulsazione di taglio coincide con l'inverso della costante di tempo del circuito stesso.

Filtro passivo passa alto RL (primo ordine)



Al solito, usando il metodo agli anelli otteniamo:

$$\bar{V}_{in} = (R + j\omega L)\bar{I}$$

$$\bar{V}_{out} = j\omega L\bar{I}$$

Di qui:

$$G(j\omega) = \frac{\bar{V}_{out}}{\bar{V}_{in}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L};$$

$$G(j\omega) \equiv \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} = \frac{j\omega LR + \omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Modulo e fase di tale numero complesso sono rispettivamente:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \arctg\left(\frac{R}{\omega L}\right)$$

Il circuito non presenta risonanza.

La pulsazione di taglio vale:

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2\omega^2 L^2 - R^2 - \omega^2 L^2}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} = 0 \Rightarrow \omega^2 L^2 = R^2$$

Essendo $R > 0; L > 0$, si ricava facilmente:

$$\omega_T = \frac{R}{L} \Rightarrow f_T = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}$$

Si nota che la pulsazione di taglio coincide con l'inverso della costante di tempo del circuito stesso.

I diagrammi di Bode (reali) di modulo e fase per:

$$f_T = 1000 \text{ Hz} \Rightarrow \frac{L}{R} = \frac{1}{2000\pi}$$

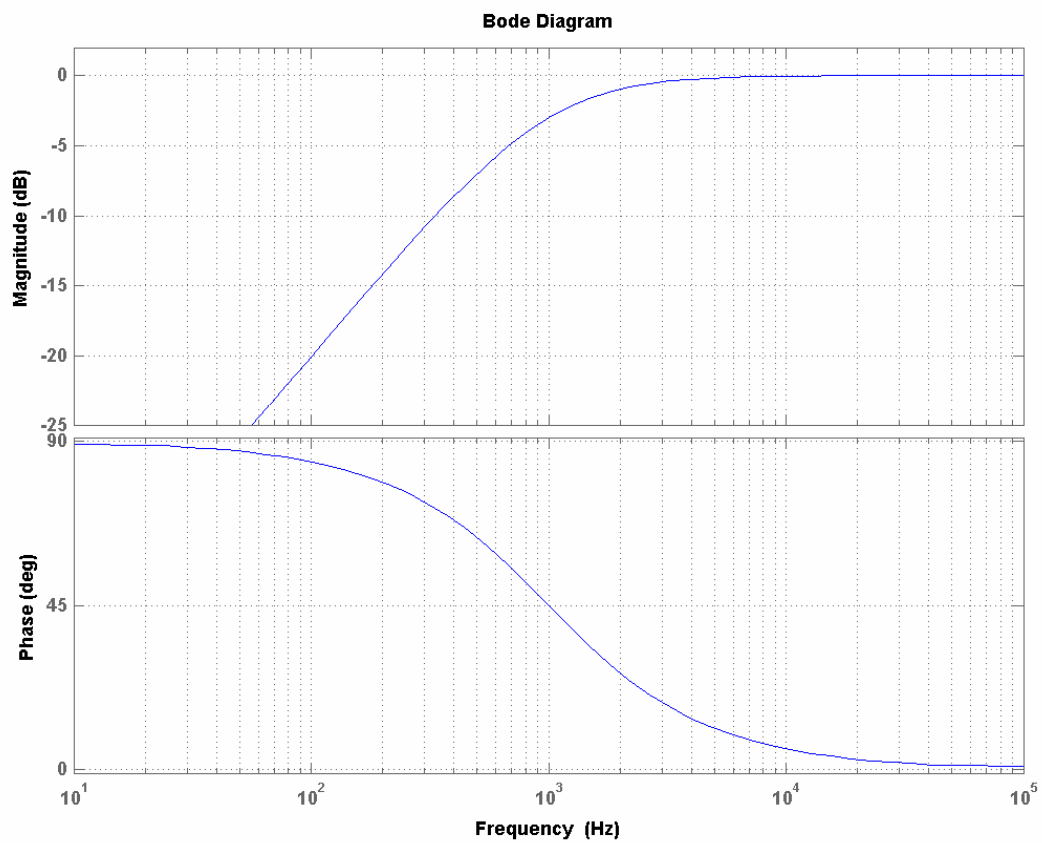
ad esempio per:

$$L = 1 \text{ H}; R = 2000\pi \Omega$$

oppure

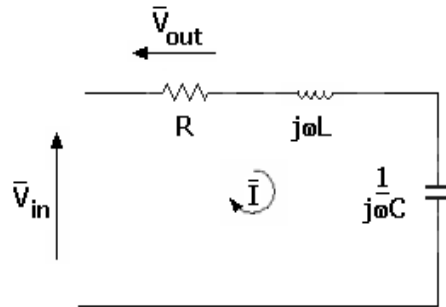
$$L = 500 \mu\text{H}; R = \pi \Omega$$

sono:



Filtro passivo passa banda RLC serie (secondo ordine)

Si consideri come variabile di uscita la tensione prelevata sul resistore di un circuito RLC serie alimentato in tensione:



In regime sinusoidale si ha:

$$\bar{V}_{in} = (j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C})\bar{I}$$

$$\bar{V}_{out} = R\bar{I}$$

da cui si ricava che la funzione di risposta in frequenza vale:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{j^2\omega^2 LC + j\omega RC + 1} = \frac{j\omega RC}{-\omega^2 LC + j\omega RC + 1}$$

I cui modulo e fase sono rispettivamente:

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \arctg\left(\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC}\right)$$

Il circuito presenta risonanza (come visto ne “Il regime sinusoidale”) per:

$$1 - \omega^2 LC = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

con ω_0 pulsazione di risonanza (si ricorda che a tale pulsazione il sistema si comporta come fosse resistivo puro portando il modulo dell’impedenza vista dal generatore ad essere minimo).

Calcoliamo la/e pulsazione/i di taglio, cercando i valori per cui è verificata la seguente:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Da cui possiamo ottenere⁶:

$$\text{Solve}[-(R^2 + C^2) \omega^2 + (1 - (L + C) \omega^2)^2 == 0, \omega]$$

$$\left\{ \left\{ \omega \rightarrow \frac{-CR - \sqrt{C} \sqrt{4L + CR^2}}{2CL} \right\}, \left\{ \omega \rightarrow \frac{CR - \sqrt{C} \sqrt{4L + CR^2}}{2CL} \right\}, \left\{ \omega \rightarrow \frac{-CR + \sqrt{C} \sqrt{4L + CR^2}}{2CL} \right\}, \left\{ \omega \rightarrow \frac{CR + \sqrt{C} \sqrt{4L + CR^2}}{2CL} \right\} \right\}$$

le cui soluzioni accettabili (a pulsazione positiva) sono le ultime due, che possono essere riscritte come:

$$\omega_{T,1} = \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}}{2}$$

$$\omega_{T,2} = \frac{\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}}{2}$$

Si deduce che siamo in presenza di un filtro passa banda in cui solo un insieme di frequenze in ingresso (banda passante) viene attenuato per meno di un valore $\sqrt{2}$.

$$\omega_{T,2} - \omega_{T,1} = \frac{\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}}{2} - \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}}{2} = \frac{R}{L}$$

Ponendo:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ pulsazione di risonanza;}$$

$$B = \frac{R}{L}, \text{ banda passante,}$$

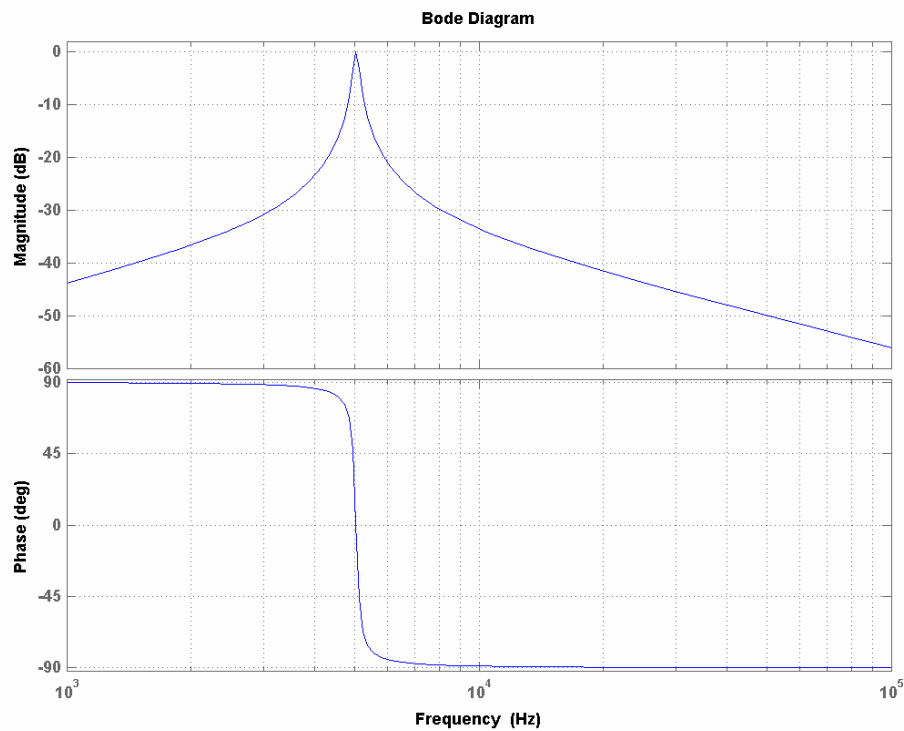
possiamo scrivere:

$$G(j\omega) = \frac{jB\omega}{-\omega^2 + jB\omega + \omega_0^2}$$

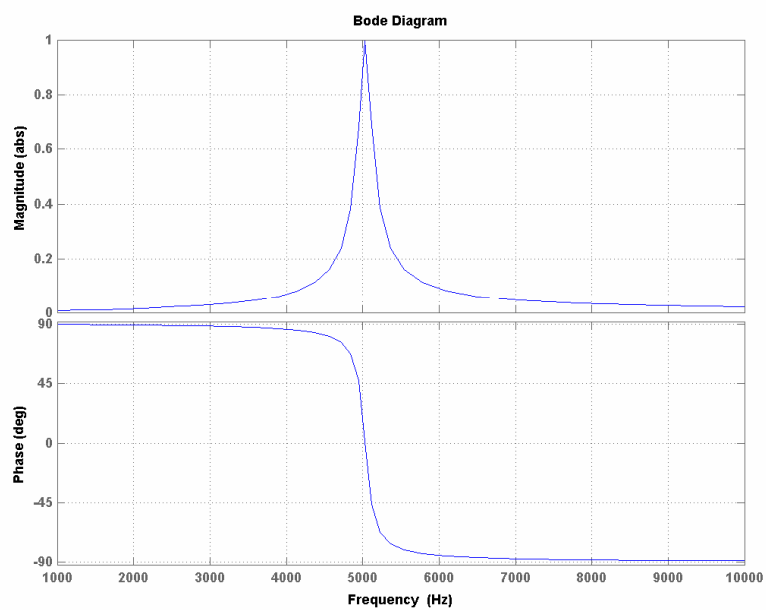
⁶ Software utilizzato: *Mathematica 5.0*

Esempi

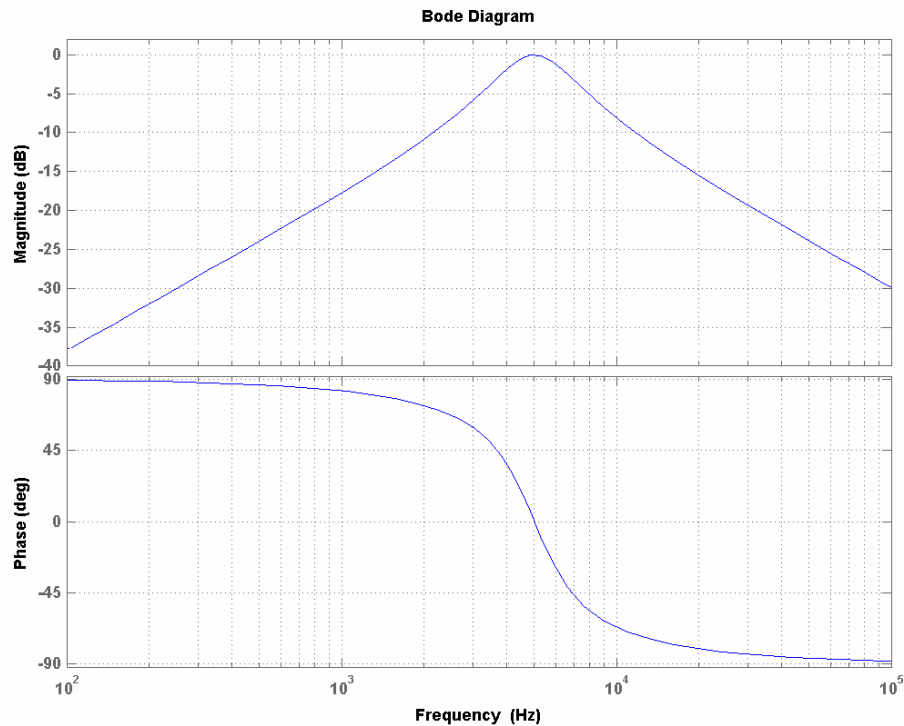
Diagrammi di Bode (reali) di modulo e fase per $C = 1\mu F$; $L = 1mH$; $R = 1\Omega$, quindi per una banda passante che si estende da circa 4950 Hz fino a circa 5100 Hz :



Per questi grafici riporto anche l'equivalente in scala decimale in ascissa ed in scala decimale ed in gradi in ordinata per modulo e fase rispettivamente:



Diagrammi di Bode (reali) di modulo e fase per $C = 1\mu F$; $L = 1mH$; $R = 20\Omega$, quindi per una banda passante che si estende da circa 3690 Hz fino a circa 6870 Hz :



In condizioni di risonanza:

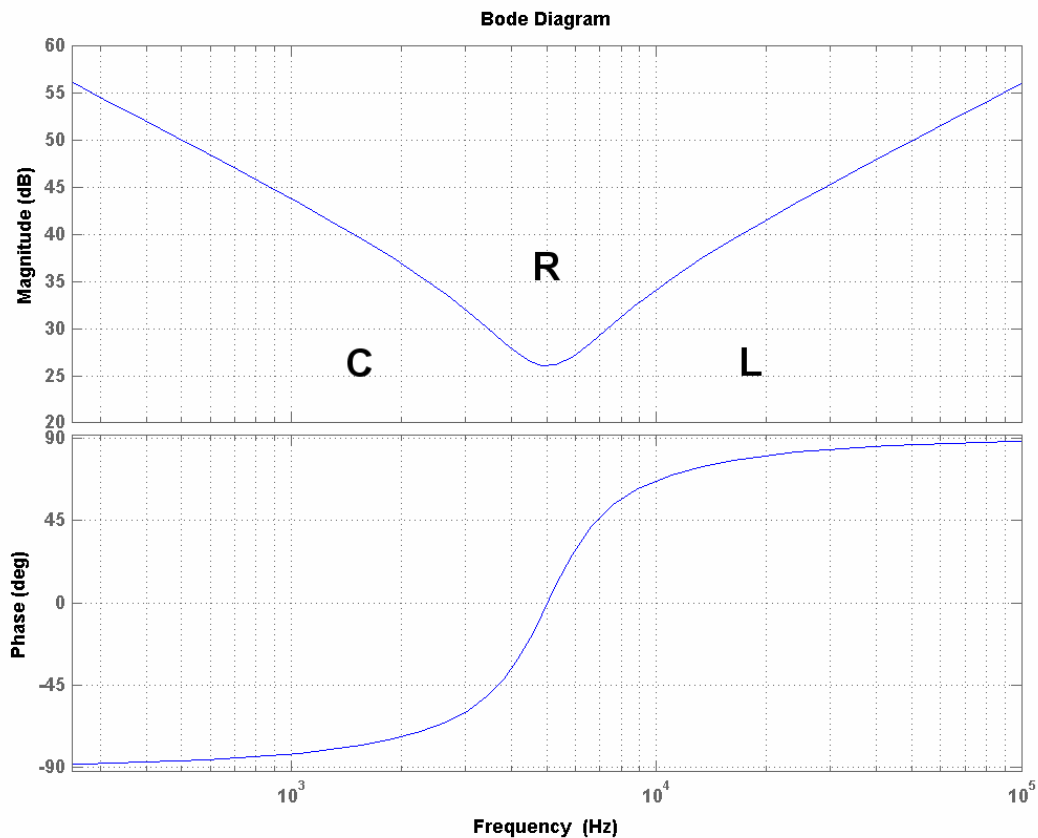
- ✓ le tensioni sul condensatore e sull'induttore sono di modulo uguale ma sfasate di 180° , ciò implicando il loro annullamento matematico a livello macroscopico;
- ✓ lo sfasamento dell'armonica a pulsazione ω_T è nullo.

Si definisce fattore di merito Q il rapporto tra il modulo della tensione sull'induttore o sul condensatore ed il modulo della tensione sul resistore alla pulsazione di risonanza:

$$Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{\omega_0}{B}$$

Q e B esprimono il grado di selettività del filtro: la selettività è tanto maggiore quanto minore è il valore della resistenza.

Diagrammi di Bode di $Z = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}$



- ✓ A frequenze “basse” il condensatore presenta un’elevata impedenza ed ostacola di conseguenza il passaggio della corrente; contemporaneamente l’induttanza si comporta più o meno come un corto circuito: il circuito nel suo insieme si dice prevalentemente capacitivo.
- ✓ Man mano che aumenta la frequenza si arriva alla frequenza di risonanza: il circuito si comporta a tale frequenza come un semplice resistore (sfasamento nullo dell’impedenza vista dal generatore).
- ✓ A frequenze “elevate” l’induttore presenta un’elevata impedenza ed ostacola di conseguenza il passaggio della corrente; contemporaneamente il condensatore si comporta sempre più da corto circuito: il circuito si dice prevalentemente induttivo.

Filtro passivo passa basso RLC serie (secondo ordine)

Si consideri come variabile di uscita la tensione prelevata sul condensatore di un circuito RLC serie alimentato in tensione. In regime sinusoidale si ha:

$$\bar{V}_{in} = (j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C})\bar{I}$$

$$\bar{V}_{out} = \frac{1}{j\omega C}\bar{I}$$

da cui si ricava che la funzione di risposta in frequenza vale:

$$G(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 LC + j\omega RC + 1}$$

I cui modulo e fase sono rispettivamente:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \arctg\left(-\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}\right)$$

Il circuito presenta risonanza in $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Calcoliamo la/le pulsazione/i di taglio:

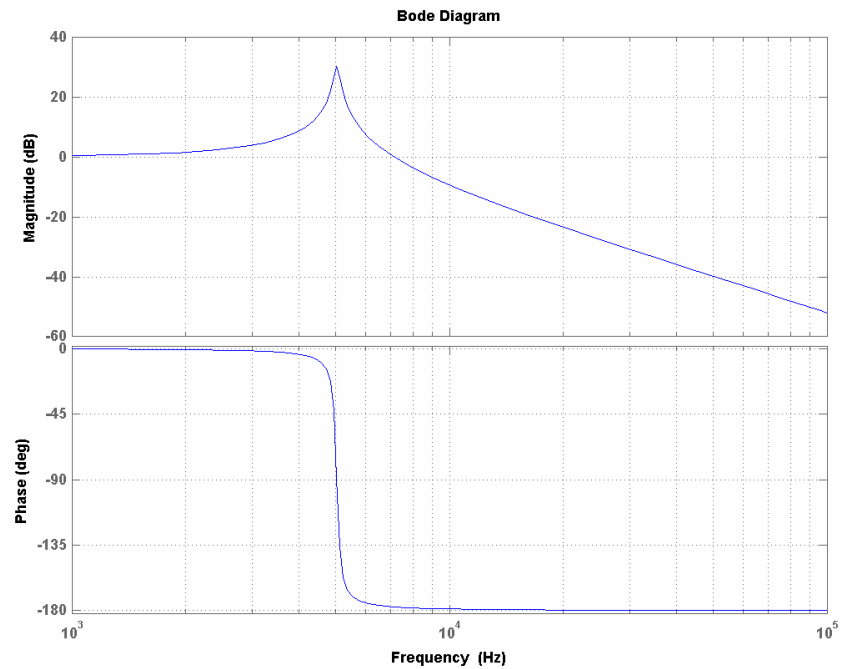
$$\text{Solve}\left[\left(R^2 * C^2\right) \omega^2 + \left(1 - \left(L * C\right) \omega^2\right)^2 - 2 == 0, \omega\right]$$

$$\left\{\left\{\omega \rightarrow -\frac{\sqrt{\frac{2}{CL} - \frac{R^2}{L^2} - \frac{\sqrt{8L^2 - 4CLR^2 + C^2R^4}}{CL^2}}}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{\omega \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{2}{CL} - \frac{R^2}{L^2} - \frac{\sqrt{8L^2 - 4CLR^2 + C^2R^4}}{CL^2}}}{\sqrt{2}}\right\}, \right. \\ \left. \left\{\omega \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{2L^2} + \frac{\sqrt{8L^2 - 4CLR^2 + C^2R^4}}{2CL^2}}\right\}, \left\{\omega \rightarrow \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{2L^2} + \frac{\sqrt{8L^2 - 4CLR^2 + C^2R^4}}{2CL^2}}\right\}\right\}$$

la cui soluzione accettabile è una sola, l'ultima. Da ciò deduciamo di essere in presenza di un filtro passa basso.

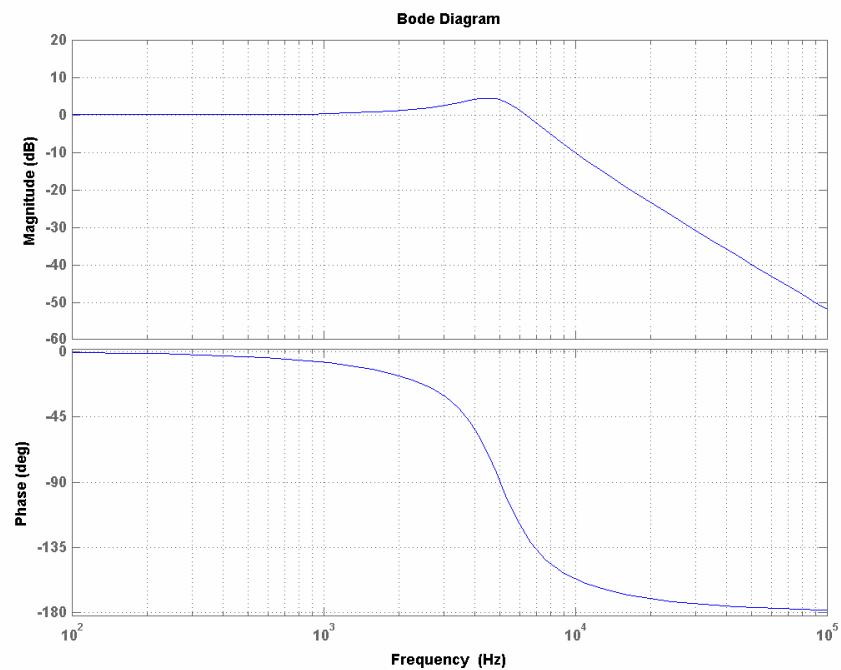
Esempi

Diagrammi di Bode (reali) di modulo e fase per $C = 1\mu F$; $L = 1mH$; $R = 1\Omega$:

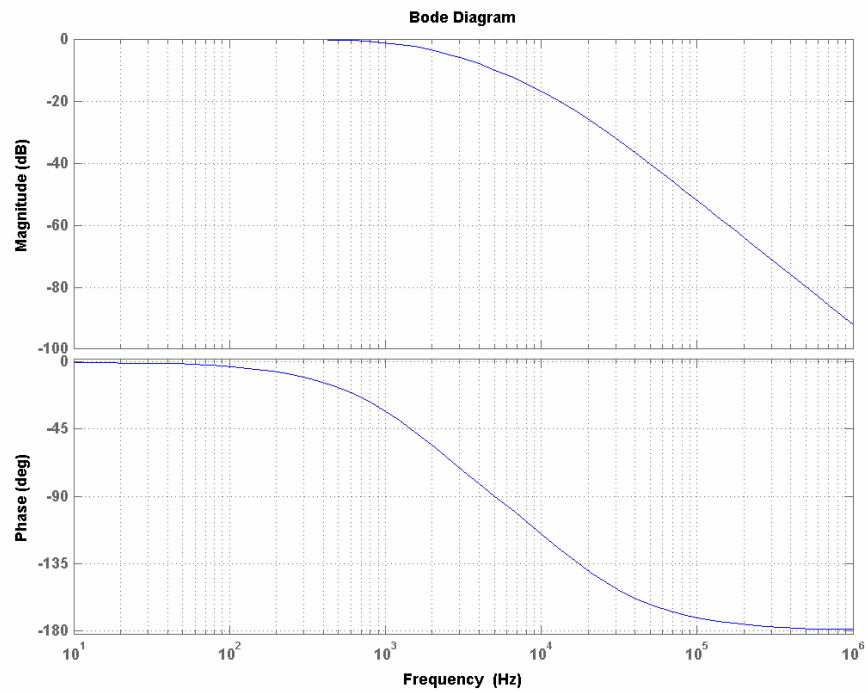


Più basso è il coefficiente di smorzamento, più alto è il picco di risonanza.

Diagrammi di Bode (reali) di modulo e fase per $C = 1\mu F$; $L = 1mH$; $R = 20\Omega$:



Diagrammi di Bode (reali) di modulo e fase per $C = 1\mu F$; $L = 1mH$; $R = 100\Omega$:



Non tratteremo il filtro passa alto RLC serie, in quanto molto simile al passa basso, ma ci soffermeremo sul filtro a spillo.

Filtro a spillo (elimina banda) RLC serie (secondo ordine)

Si consideri come variabile di uscita la somma delle tensioni prelevate su condensatore ed induttore di un circuito RLC serie alimentato in tensione. In regime sinusoidale si ha:

$$\bar{V}_{in} = (j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C})\bar{I}$$

$$\bar{V}_{out} = (\frac{1}{j\omega C} + j\omega L)\bar{I}$$

da cui si ricava che la funzione di risposta in frequenza vale:

$$G(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 LC}{-\omega^2 LC + j\omega RC + 1}$$

La/e pulsazione/i di taglio:

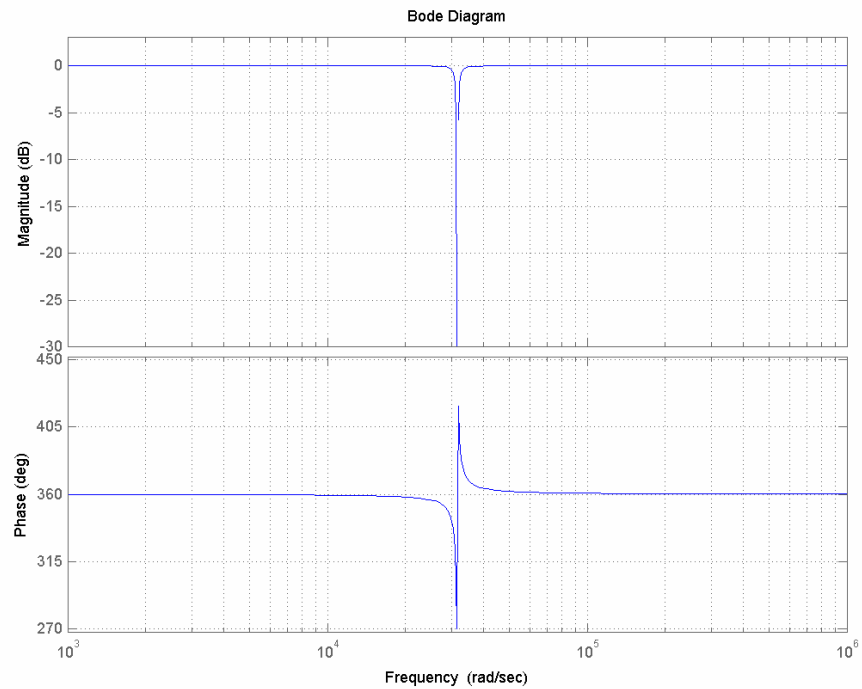
$$\text{Solve}[(R^2 + C^2) \omega^2 - (1 - (L + C) \omega^2)^2 == 0, \omega]$$

$$\left\{ \left\{ \omega \rightarrow \frac{-CR - \sqrt{C} \sqrt{4L + CR^2}}{2CL} \right\}, \left\{ \omega \rightarrow \frac{CR - \sqrt{C} \sqrt{4L + CR^2}}{2CL} \right\}, \left\{ \omega \rightarrow \frac{-CR + \sqrt{C} \sqrt{4L + CR^2}}{2CL} \right\}, \left\{ \omega \rightarrow \frac{CR + \sqrt{C} \sqrt{4L + CR^2}}{2CL} \right\} \right\}$$

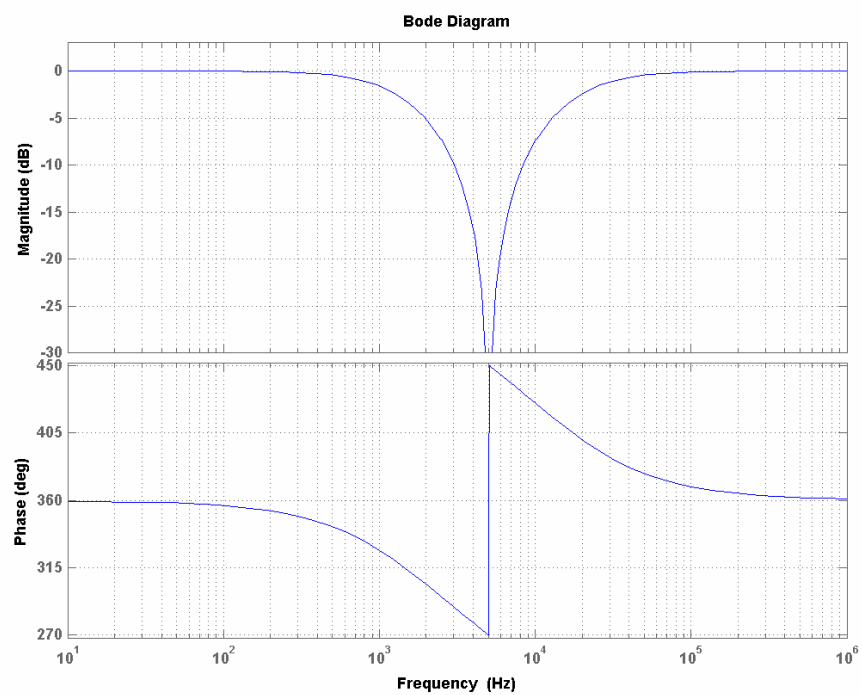
Le due soluzioni accettabili definiscono la banda passante: $B = \frac{R}{L}$

Esempi

Diagrammi di Bode (reali) di modulo e fase per $C = 1\mu F$; $L = 1mH$; $R = 1\Omega$:

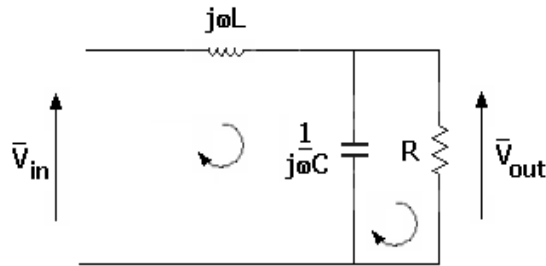


Diagrammi di Bode (reali) di modulo e fase per $C = 1\mu F$; $L = 1mH$; $R = 100\Omega$:



Filtro passivo passa basso RLC della topologia in figura(secondo ordine)

Si consideri come variabile di uscita la tensione prelevata sul resistore del circuito in figura:



In regime sinusoidale, usando il metodo agli anelli, otteniamo:

$$\bar{V}_{in} = j\omega L(\bar{I}_1) + \frac{1}{j\omega C}(\bar{I}_1 - \bar{I}_2)$$

$$0 = \frac{1}{j\omega C}(\bar{I}_2 - \bar{I}_1) + R(\bar{I}_2)$$

$$\bar{V}_{out} = R\bar{I}_2$$

da cui si ricava che la funzione di risposta in frequenza vale:

$$G(j\omega) = \frac{R}{-\omega^2 LRC + j\omega L + R}$$

Calcoliamo la pulsazione di taglio:

$$|G(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + (R - \omega^2 LRC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

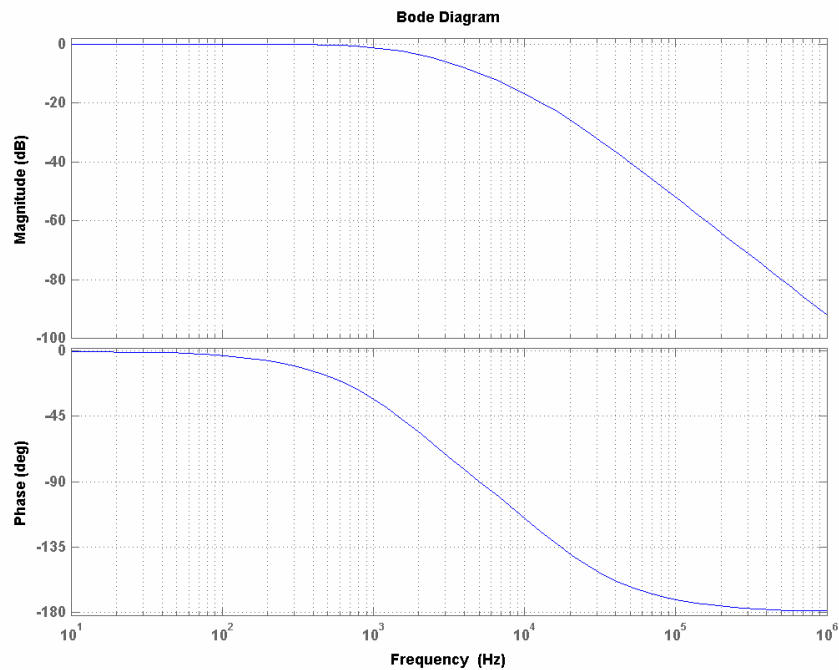
$$\text{Solve}[2 R^2 - (L^2) \omega^2 - (R - (L * R * C) \omega^2)^2 == 0, \omega]$$

$$\left\{ \left\{ \omega \rightarrow -\frac{\sqrt{\frac{2}{CL} - \frac{1}{C^2 R^2} - \frac{\sqrt{L^2 - 4CLR^2 + 8C^2 R^4}}{C^2 LR^2}}}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ \omega \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{2}{CL} - \frac{1}{C^2 R^2} - \frac{\sqrt{L^2 - 4CLR^2 + 8C^2 R^4}}{C^2 LR^2}}}{\sqrt{2}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \omega \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{1}{2C^2 R^2} + \frac{\sqrt{L^2 - 4CLR^2 + 8C^2 R^4}}{2C^2 LR^2}} \right\}, \left\{ \omega \rightarrow \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{1}{2C^2 R^2} + \frac{\sqrt{L^2 - 4CLR^2 + 8C^2 R^4}}{2C^2 LR^2}} \right\} \right\}$$

Soluzione accettabile: l'ultima.

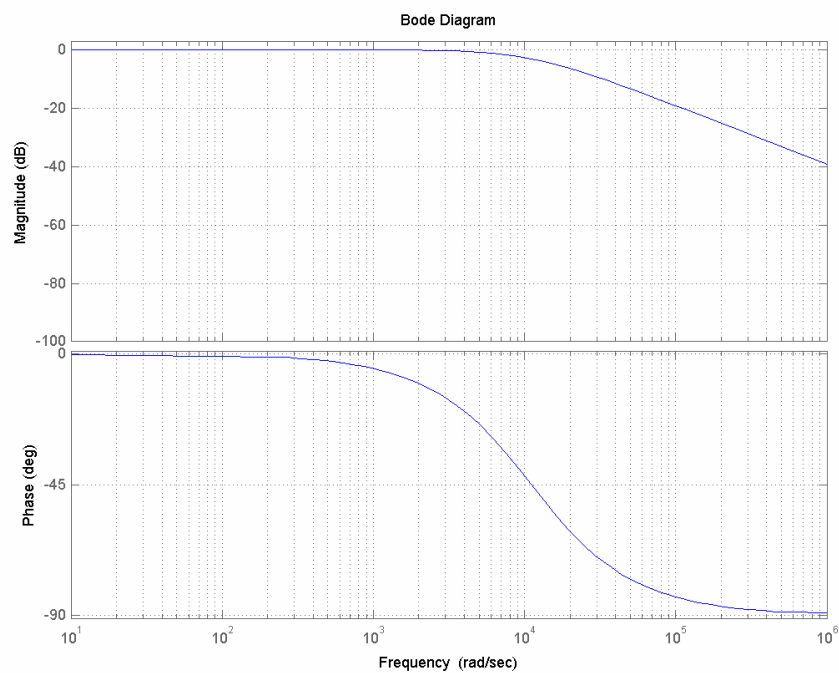
Esempio

Diagrammi di Bode (reali) di modulo e fase per $C = 1\mu F$; $L = 1mH$; $R = 10\Omega$, che definiscono per il filtro una frequenza di taglio di 1765 Hz :



12dB/ottava

Un filtro passa basso RC del primo ordine, invece, per la medesima frequenza di taglio presenta il diagramma seguente. Si nota come il decadimento del modulo in funzione della frequenza sia decisamente più lento.



6dB/ottava

Per finire, esplicitiamo in funzione di C , ovvero, date resistenza, induttanza e pulsazione di taglio, diamo l'espressione che permetta di calcolare la capacità. Di estrema utilità nel progetto dei filtri del crossover per casse acustiche.

$$\text{Solve}\left[\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{1}{2C^2R^2} + \frac{\sqrt{L^2 - 4CLR^2 + 8C^2R^4}}{2C^2LR^2}} = \omega_T, C\right]$$

$$C = \frac{R \pm \sqrt{2R^2 - L^2\omega_T^2}}{LR\omega_T^2}$$

Se per semplicità di conti poniamo:

$$L = \frac{\omega_T \sqrt{2}}{R}$$

allora il valore della capacità del condensatore è vincolato ad essere:

$$C = \frac{1}{R\omega_T \sqrt{2}}$$

Queste sono le formule che si trovano con ricorrenza nella relativa letteratura.

Autore: ing. Marco Buratto.

Contributi tratti da www.scuolaelettrica.it, a cura del prof. ing. Pietro De Paolis.

Per ogni segnalazione riguardante commenti, comunicazioni di errori, omissioni, ingiurie varie..... e via dicendo, prego scrivere a: marco.buratto@tiscali.it. Contributi ben accetti. Cercansi traduttori.

E' consentita la riproduzione parziale o totale del presente testo, senza necessità di permesso alcuno, purché venga riportato l'autore.