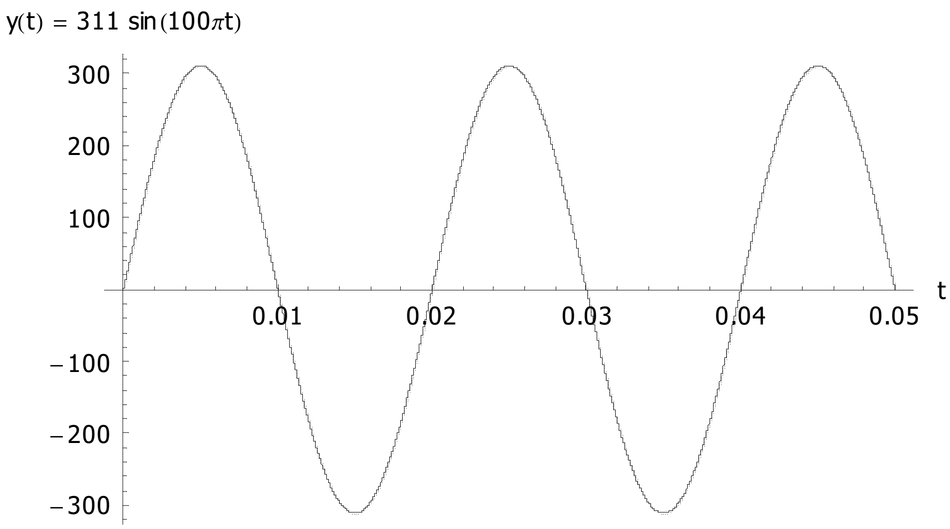
## IL REGIME SINUSOIDALE

Una tensione o una corrente si dice sinusoidale quando la sua ampiezza al variare del tempo è pari a:

$$y(t) = Y_{MAX}\ \sin(\omega t + \varphi) \equiv Y_{MAX}\ \sin(2\pi f t + \varphi) \equiv Y_{MAX}\ \sin(\frac{2\pi}{T} t + \varphi)$$

Le precedenti rappresentano tre espressioni diverse per scrivere la medesima funzione.

La tensione disponibile negli appartamenti, ad esempio, è una tensione sinusoidale, come rappresentato in figura seguente:




$$f = 50Hz$$

$$T = 0.02s$$

$$\omega = 2\pi \cdot 50 \frac{rad}{s}$$

$$Y_{MAX} = 311V$$

$$\varphi = 0rad$$

Sull’asse delle ascisse si rappresenta il tempo (in secondi), mentre sull'asse verticale, delle ordinate, si ha $y(t)$, cioè il valore della tensione all'istante considerato $t$. In pratica, il valore della tensione, in un periodo, parte da uno zero e torna al secondo zero successivo, oppure parte dal valore massimo positivo e finisce al successivo valore massimo positivo, e così via. La funzione si ripete tale e quale dopo un tempo $T$ detto appunto periodo. Si dice, quindi, periodo il tempo impiegato da una funzione per ripetersi tale e quale. Matematicamente, una grandezza si dice periodica se vale:

$$y(t) = y(t+T), \forall t$$

Si dice frequenza di una funzione sinusoidale il numero di periodi che compie in un secondo, si indica con la lettera $f$ e si misura in $Hz$ (Hertz). Ad esempio, $f = 50Hz$ vuol dire che in un secondo l'onda si ripete tale e quale 50 volte, cioè compie 50 periodi o cicli al secondo. Tra periodo e frequenza esiste la seguente relazione:

$$f = \frac{1}{T}$$

La frequenza è l'inverso del periodo. La frequenza della tensione nelle abitazioni civili è $f = 50Hz$.

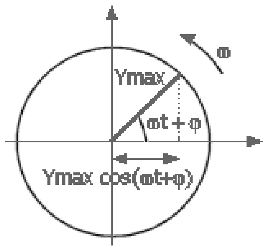
Una sinusoide è la proiezione di un moto circolare uniforme sull’asse verticale di un “segmento” (vettore) di lunghezza unitaria, con origine nel centro degli assi cartesiani, che ruota in senso antiorario. Una cosinusoide, invece, è la proiezione del moto sull’asse orizzontale. Per fissare le idee, se colleghiamo le spazzole di un alternatore agli estremi di un filo conduttore di data resistenza, nel filo stesso circola una corrente sinusoidale. L’unica differenza nella forma d’onda di sinusoide e cosinusoide è uno sfasamento reciproco pari a $\frac{\pi}{2}$ e spesso useremo il termine “sinusoidale” per indicare entrambe le funzioni.

Si definisce pulsazione (o velocità angolare) la grandezza $\omega$ calcolata come segue:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \equiv 2\pi f$$

Si misura in radianti al secondo ed il suo significato si evince direttamente dalla sua definizione, ovvero esprime la velocità angolare (“quale angolo percorre il vettore in un secondo”) del vettore che ruoti a frequenza $f$ costante[1].

Torniamo invece sul primo grafico della presente: sull'asse verticale abbiamo rappresentato $y(t)$ cioè il valore della tensione all'istante $t$. Si dice ampiezza di un'onda il valore massimo che essa raggiunge. Nell'onda sinusoidale il valore massimo positivo è uguale a quello negativo. Nel diagramma di cui sopra il valore massimo è 311, quindi l'ampiezza $Y_{MAX} = 311$ (Volt).




In questo senso, $y(t)$ è la proiezione sull’asse verticale di un vettore di modulo $Y_{MAX}$ che ruota a velocità angolare $\omega$ costante in senso antiorario, ovvero $T$ è il tempo che il vettore impiega a compiere un angolo giro completo, ruotando con frequenza $f$. Una cosinusoide è la sua proiezione sull’asse orizzontale: in seguito ci riferiremo più spesso alla funzione coseno.

Scriviamo l’espressione della tensione sinusoidale in funzione del tempo come (rispetto a prima, modifichiamo qui solo la notazione):

$$v(t) = V_M \sin(\omega t + \varphi) \equiv V_M \sin(2\pi f t + \varphi) \equiv V_M \sin(\frac{2\pi}{T} t + \varphi)$$

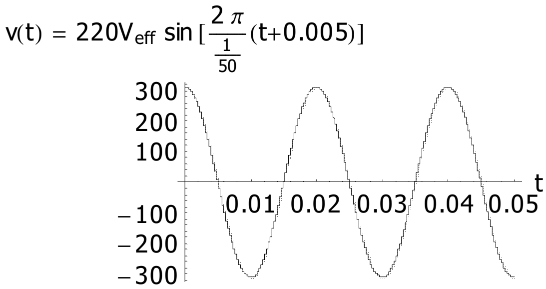
con $\varphi$ sfasamento rispetto allo zero (considerato finora nullo). In particolare, uno sfasamento trasla la curva a sinistra (sfasamento positivo) od a destra (sfasamento negativo), come mostrato rispettivamente di seguito.

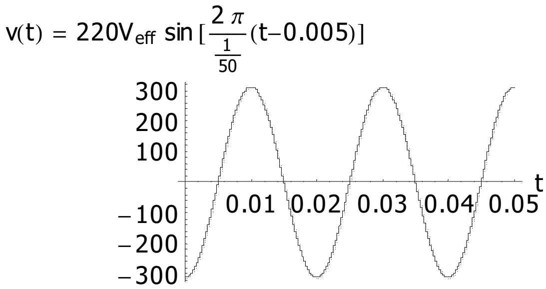
1 Velocità angolare

La velocità angolare è definita dal rapporto fra l'angolo spazzato dal vettore ed il tempo impiegato a compiere tale rotazione:

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$$

Con $\vartheta$ angolo compreso tra il vettore e l’asse reale. Nel moto circolare uniforme, la velocità angolare vale quanto sopra definito, essendo, nell'arco di tempo $T$, l'angolo descritto dal raggio proprio $2\pi$ radianti (angolo giro).




Si definisce valore efficace di una grandezza elettrica sinusoidale il valore equivalente che produce gli stessi effetti di riscaldamento della medesima grandezza continua; è quindi legato alla potenza che tale grandezza è in grado di trasferire ad un carico resistivo. Ovvero: una tensione continua (ad esempio pari a 220 V) che alimenti un dato resistore produce effetti di riscaldamento equivalenti ad una tensione alternata di medesimo valore efficace (220 V) che alimenti lo stesso componente.

Il valore efficace di una tensione sinusoidale viene spesso indicato con $V_{eff}$ (o semplicemente con la $V$ maiuscola) e misurato anch'esso, ovviamente, in Volt. Conoscendo il valore massimo di una tensione sinusoidale, possiamo calcolare il valore efficace tramite la seguente:

$$V_{eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

E' così chiarito il motivo per il quale la tensione sinusoidale dei nostri appartamenti viene comunemente quantificata a 220V mentre nel primo grafico riportato la sua ampiezza è circa 311V.

Il valore quadratico medio, o efficace, è infatti definito, proprio per ragioni legate alla potenza, come:

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} v^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} V_M{}^2 \sin^2(\omega t + \varphi)dt} = \sqrt{\frac{V_M{}^2}{2}}$$

Analoghe considerazioni valgono per la corrente sinusoidale. Se indichiamo con $I_M$ l'ampiezza (massima) della corrente, vale:

$$I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

**STUDIO CIRCUITALE**

Escluso il transitorio immediatamente successivo alla chiusura di un circuito (lineare, tempoinvariante ed asintoticamente stabile), le correnti e le tensioni circolanti nel circuito alimentato da generatori sinusoidali sono anch'esse funzioni sinusoidali di ampiezza, frequenza (o pulsazione) e fase costanti, ovvero sono funzioni descritte dalla soluzione particolare dell'equazione differenziale associata, soluzione che non dipende dalle condizioni iniziali. A regime, se i generatori sono sinusoidali della medesima pulsazione $\omega$, tutte le correnti e le tensioni circolanti nel circuito avranno pulsazione $\omega$, ma diversa ampiezza e fase tra loro[2].

[2] Detta così, potrebbe sembrare una frase di importanza relativa; tuttavia è da tenere nella massima considerazione, essendo l'essenza di teoremi fondamentali per la Teoria dei Sistemi e dei Segnali, nonché per l'Elettrotecnica stessa. Un'ulteriore annotazione: la frase "diversa ampiezza" implica anche ampiezza nulla, quindi uscita nulla. E' utile

Se ci disinteressiamo del transitorio e siamo interessati solamente al suo comportamento a regime, un circuito dinamico alimentato da generatori sinusoidali può essere risolto con tecniche molto meno difficoltose che la risoluzione di equazioni differenziali, magari di ordine elevato.

L'importanza delle forzanti sinusoidali è inoltre dovuta all'asserzione che ogni funzione periodica, sotto ipotesi assai generali, è esprimibile coma sommatoria di funzioni sinusoidali (sviluppo in serie di Fourier). Si rimanda alla Teoria dei Segnali per i dovuti approfondimenti.

**VETTORI ROTANTI e FASORI**

Introdurremo ora un metodo di analisi che consente di risolvere i circuiti in alternata sinusoidale, a regime, in modo formalmente analogo ai circuiti in continua. Mediante opportuna scelta della fase, scriviamo $i(t)$ e $v(t)$ come funzioni cosinusoidali, nient'altro che per semplicità di conti.

Ricordando che vale:[3]

$$e^{j\beta} = \cos(\beta) + j\sin(\beta)$$

definiamo fasore la grandezza:

$$\overline{A} = A_M e^{j\varphi}$$

così che:

$$A_M \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\{\overline{A} e^{j\omega t}\}$$

dove $\mathrm{Re}\{\cdot\}$ indica la parte reale del suo argomento.

Infatti:

$$\mathrm{Re}\{\overline{A} e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{A_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{A_M e^{j(\omega t+\varphi)}\} = \mathrm{Re}\{A_M [\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)]\} = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

Nel piano complesso, $\overline{A}$ è un vettore[4] di lunghezza $A_M$ formante un certo angolo $\varphi$ con l'asse reale; $A_M e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ è lo stesso vettore, in rotazione con velocità angolare $\omega$ in senso antiorario.

Graficamente: la proiezione del vettore sull'asse reale (quindi la sua parte reale) coincide istante per istante con la grandezza rappresentata dal fasore, grandezza (cosinusoidale) avente valore massimo $V_M$ ($I_M$) e frequenza $f$.

Dato che, a regime, tutte le correnti e le tensioni circolanti nel circuito avranno pulsazione $\omega$, ogni grandezza sarà rappresentata da fasori rotanti tutti con la stessa pulsazione.

---

sottolinearlo in quanto, in molti casi sia teorici che pratici, questo teorema sembrerebbe falso senza la precisazione di poc'anzi.

[3] Vedere pagina *VII*.

[4] Vedere pagina *VIII*.

Le associazioni grandezze/fasori divengono:

$$A_M \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \overline{A}$$

$$\frac{d}{dt} A_M \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow j\omega\overline{A}$$

$$\int A_M \cos(\omega t + \varphi)dt \rightarrow \frac{1}{j\omega}\overline{A}$$

Infatti, ad esempio:

$$\frac{d}{dt} A_M \cos(\omega t + \varphi) = -\omega A_M \sin(\omega t + \varphi)$$

a questo associamo $j\omega\overline{A}$ dato che:

$$-\omega A_M \sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\{ j\omega\overline{A}e^{j\omega t}\}$$

---

Il metodo dei fasori consente di trasformare le equazioni differenziali in equazioni algebriche, in campo complesso, nel seguente modo. Prendiamo come esempio un circuito RLC parallelo alimentato da un generatore di corrente:

$$i(t) = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

L'equazione differenziale governante il circuito è:

$$LC\frac{d''}{dt^2} i_L(t) + \frac{L}{R}\frac{d}{dt} i_L(t) + i_L(t) = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

Se ora $\overline{X}$ è il fasore di $i_L$ e $\overline{Y}$ di $A_M \cos(\omega t + \varphi)$, possiamo scrivere:

$$LC(j\omega)^2\,\overline{X} + \frac{L}{R}j\omega\overline{X} + \overline{X} = \overline{Y}$$

Notiamo che appunto si tratta di equazione algebrica. In sintesi, abbiamo trattato i componenti dinamici come resistori (impedenze), con queste regole:

$$C \rightarrow \overline{I}_C = j\omega C\overline{V}_C \rightarrow \mathbf{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega \mathrm{C}}$$

$$L \rightarrow \overline{V}_L = j\omega L\overline{I}_L \rightarrow \mathbf{Z}_L = j\omega L$$

$$R \rightarrow \overline{V}_R = R\overline{I}_R \rightarrow \mathbf{Z}_R = R$$

L'impedenza di un componente è definita come il rapporto tra la tensione vettore agente ai suoi capi e la corrente vettore che attraversa tale componente e si misura in Ohm.

Per lo studio di un circuito tratteremo direttamente i componenti dinamici come "resistori" di impedenza[5] nota, senza abbozzare nemmeno lo studio delle relative equazioni differenziali! Quindi rimangono immutate le LKC e LKT.

Al termine dello studio circuitale, con operazione inversa, si trasformeranno le grandezze fasoriali in grandezze nel dominio del tempo:

$$A_M \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\{\overline{X} e^{j\omega t}\}$$

[5] Può essere più chiaro riferirci all'equazione integro-differenziale del primo ordine di un RLC serie con generatore di tensione sinusoidale – dalla quale poi viene ricavata l'equazione differenziale di secondo ordine da risolvere.

$$R i_L(t) + L\frac{d}{dt} i_L(t) + \frac{1}{C}\int i_L(t)dt = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

Nel dominio delle frequenze:

$$R\overline{X} + L(j\omega)\overline{X} + \frac{1}{C}(\frac{1}{j\omega})\overline{X} = \overline{Y}$$

risultando più immediata la verifica delle corrispondenze dette.

**NOTE**

L'analogia tra fasori, trasformate di Laplace (ad argomento complesso) e Fourier è fortissima. Si consiglia di approfondire l'argomento, trattato generalmente nella Teoria dei Sistemi e nella Teoria dei Segnali.

<u>*Identità di Eulero*</u>

Ogni funzione analitica, cioè che soddisfi alle condizioni di cui sotto, può essere approssimata mediante una serie di potenze del tipo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Sia $f(z)$ una funzione complessa (di variabile complessa a valori in $C$) definita in un intorno di $z_0$ (complesso) e derivabile infinite volte in $z_0$; cerchiamo un polinomio $P(z)$ tale che:

$$P(z_0) = f(z_0);\ P'(z_0) = f'(z_0);\ ...;\ P^{(n)}(z_0) = f^{(n)}(z_0)$$

per determinati $z_0$. Si può dimostrare che tale polinomio è dato dalla:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

in cui $f^{(n)}(z_0)$ indica la derivata di ordine $n$ della funzione in $z = z_0$.

Se poniamo $z_0 = 0$, cioè studiamo la serie di potenze con centro nello zero, vale (Serie di Mac Laurin):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

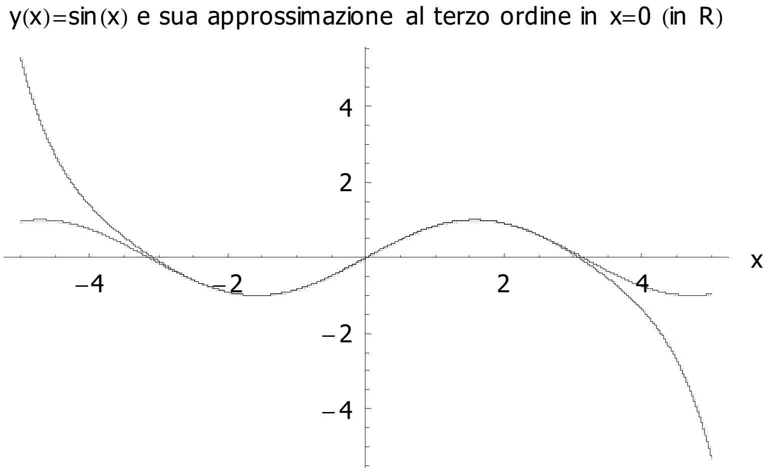
Gli sviluppi in serie di Mac Laurin delle funzioni di nostro interesse sono i seguenti:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + ..., \forall z \in C$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + ..., \forall z \in C$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + ..., \forall z \in C$$

Ad esempio:




Valutiamo ora la funzione esponenziale con argomento $j\beta$ :

$$e^{j\beta} = 1 + j\beta + \frac{(j\beta)^2}{2!} + \frac{(j\beta)^3}{3!} + \frac{(j\beta)^4}{4!} + \frac{(j\beta)^5}{5!} + ... =$$
$$= (1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + ...) + j(\beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} + ...) \equiv \cos(\beta) + j\sin(\beta)$$

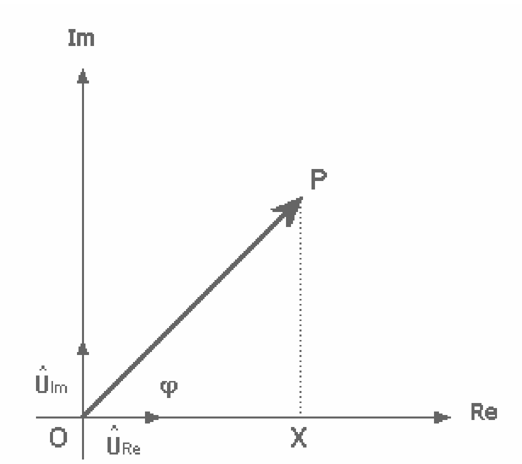
per confronto con le serie rispettive. Abbiamo quindi dimostrato che:

$$e^{j\beta} = \cos(\beta) + j\sin(\beta)$$

*Piano complesso e vettori*

Preso come riferimento il piano complesso, nel quale rappresentiamo sulle ascisse la parte reale e sulle ordinate la parte immaginaria di un dato numero complesso, possiamo associare a tale numero un segmento, con origine nel centro degli assi e vertice sul punto che rappresenta il numero stesso. Segue che nel piano complesso ogni numero complesso è rappresentato da un vettore. Un vettore in un piano – visto come uno spazio vettoriale di dimensione due – può esser espresso mediante le sue componenti nella base canonica (componenti secondo i versori in figura) oppure, in coordinate polari, mediante la notazione modulo e fase.

Sia: $P = (2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$



Ricaviamo facilmente che il modulo (lunghezza) del vettore è 4 (Teorema di Pitagora):

$$OP = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{P\} + \mathrm{Im}^2\{P\}}$$

e l'angolo tra vettore e asse reale è di 45°, ovvero $\pi / 4$.

Infatti:

$$PX = OX \quad tg(\varphi) \Rightarrow tg(\varphi) = \frac{PX}{OX} = 1 \Rightarrow \varphi = arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

In generale:

$$\varphi = arctg\left(\frac{\mathrm{Im}\{P\}}{\mathrm{Re}\{P\}}\right)$$

Il vettore $\overline{A}$ raffigurato, che congiunge l'origine degli assi col punto P può esser quindi descritto come:

$$\overline{A} = (2\sqrt{2})\hat{u}_{\mathrm{Re}} + (2\sqrt{2})\hat{u}_{\mathrm{Im}}$$

mediante le sue componenti secondo i già citati versori (vettori di modulo, o lunghezza, unitari) degli assi coordinati reale ed immaginario, oppure come:

$$\overline{A} = \left|\overline{A}\right| e^{j\varphi} = 4e^{j\frac{\pi}{4}}$$

in notazione modulo e fase. Infatti:

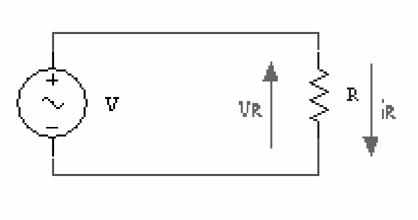
$$4e^{j\frac{\pi}{4}} = 4[\cos(\frac{\pi}{4}) + j\sin(\frac{\pi}{4})] = 4(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}j$$

Coordinate che indicano il punto $P = (2\sqrt{2};2\sqrt{2})$ nel piano.

Diamo uno sguardo ai componenti elettrici nel “dominio dei fasori” o, più correttamente, nel dominio delle frequenze.

**CIRCUITO PURAMENTE RESISTIVO**

Un circuito si dice puramente resistivo quando compaiono solo resistori.




Nel circuito puramente resistivo la corrente è in fase con la tensione (il resistore non sfasa le sinusoidi di corrente e tensione).

Sia: $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$

Risolviamo innanzitutto per chiarezza il circuito nel dominio del tempo. Per il resistore si ha:

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

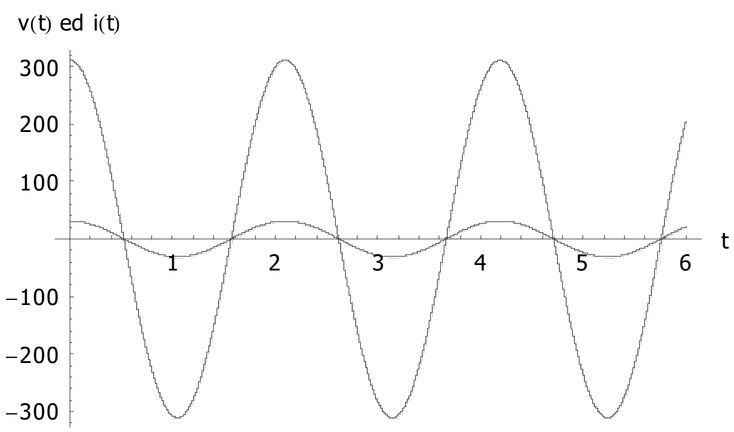
Nel circuito di cui sopra abbiamo inoltre:

$$v_R(t) = v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$$

Quindi:

$$i_R(t) = \frac{V_M}{R}\cos(\omega t + \varphi)$$

La forma d’onda della corrente è identica a quella della forzante (tensione), fatta salva la diversa ampiezza, $R$ volte più piccola. Se, portando un esempio grafico, si avessero: $\varphi = 0$ , $\omega = 3\frac{rad}{s}$ , $R = 10\Omega$ e $V_M = 311V$ , le forme d’onda di tensione e corrente sarebbero come da figura seguente.

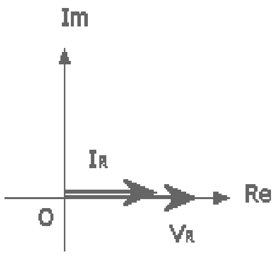


*Risoluzione fasoriale*

La legge di Ohm applicata ai fasori rappresentanti tensione e corrente implica che:

$$\bar{V}_R = R\bar{I}_R$$

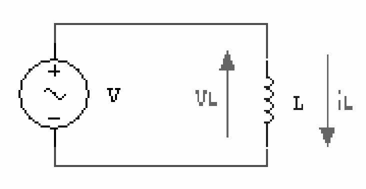
Con, per questo particolare circuito: $\bar{V}_R = \bar{V}$ .




Il vettore corrente è parallelo al vettore tensione, in quanto tensione e corrente sono in fase, come visibile in entrambe le figure precedenti. E' palese che per un simile circuito, in cui mancano gli elementi dinamici, lo studio nel dominio delle frequenze non è indispensabile (nota importantissima…).

**CIRCUITO PURAMENTE INDUTTIVO**

Un circuito si dice puramente induttivo quando in esso compaiono solo induttori. Lo schema elettrico di un induttore alimentato da un generatore di tensione sinusoidale è il seguente:




Sia:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$$

Nel dominio del tempo, per l'induttore si ha:

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

ovvero:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int v_L(t) dt$$

Nel circuito di cui sopra abbiamo inoltre:

$$v_L(t) = v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$$

Quindi:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int (\mathrm{V_M} \cos(\omega t + \varphi))\, dt = \frac{1}{L} \frac{V_M}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$$

che coincide con:

$$\frac{1}{L} \frac{V_M}{\omega} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

$$[nota : -\frac{\pi}{2} rad \equiv -90°]$$

L'integrale di una grandezza sinusoidale (cosinusoidale) è una nuova grandezza sinusoidale (cosinusoidale) sfasata di – 90°. Nella fattispecie, tra tensione e corrente di un induttore esiste uno sfasamento di – 90°, con la corrente "in anticipo" rispetto alla tensione.

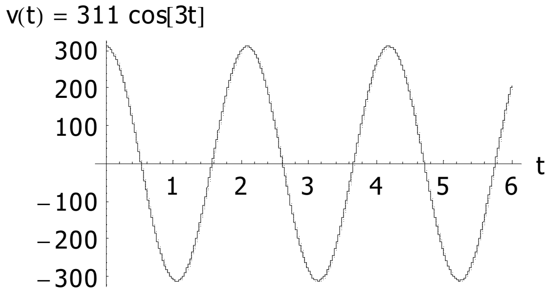
Risultati finali:

$$v_L(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$$

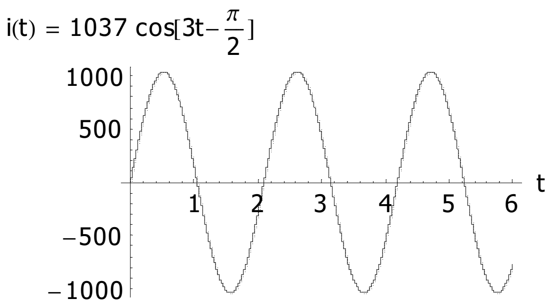
$$i_L(t) = \frac{1}{\omega L} V_M \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

L'ampiezza della sinusoide della corrente circolante nell'induttanza e quindi nell'intero circuito è $\omega L$ volte più piccola di quella della tensione, dipendendo sempre dalla sua pulsazione.

Se, portando un esempio grafico, si avessero: $\varphi = 0$ , $\omega = 3\frac{rad}{s}$ , $L = 0.1H$ e $V_M = 311V$




la forma d'onda della corrente a regime[6] sarebbe, matematicamente o nell'ipotesi che il generatore sia in grado di erogare tutta la corrente calcolata:




La scala dei due grafici è ovviamente diversa. In ogni modo, "Ce la siamo cavata" con poco: non è stato nemmeno necessario risolvere equazioni differenziali, tra l'altro. In generale, tuttavia, con circuiti già appena più grandi, si dovrà per forza di cose ricorrere alla tecnica fasoriale. Già con tre elementi dinamici abbiamo, in caso di circuito non degenere, un'equazione differenziale di ordine tre. E non è sempre cosa gradita doverla risolvere.

*Risoluzione fasoriale*

Per prima cosa ricaviamo il fasore corrispondente alla forzante:

$$\overline{V} = V_M e^{j\varphi}$$

[6] Lo zero dei tempi coincide qui graficamente con l'inizio ipotizzato del regime sinusoidale, per semplicità di visualizzazione. E' ovvio che il circuito generalmente, in realtà, vada a regime "qualche tempo dopo" lo zero.

Riferiamoci ora alla topologia circuitale. La legge di Ohm implica che, in regime sinusoidale, per l’induttore valga:

$$\overline{V}_L = Z_L \ \overline{I}_L \rightarrow \overline{V}_L = j\omega L \ \overline{I}_L$$

con (nel particolare caso del circuito in figura): $\overline{V}_L = \overline{V}$

Quindi:

$$\overline{I}_L = \frac{V_M e^{j\varphi}}{j\omega L}$$

Il risultato finale, nel dominio del tempo, sarà quindi, come ci aspettiamo:

$$i_L(t) = \mathrm{Re}\{\overline{I}_L e^{j\omega t}\} = \frac{1}{\omega L} V_M \ \sin(\omega t + \varphi) \equiv \frac{1}{\omega L} V_M \ \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

Altre informazioni:

Il modulo $I_L \equiv \left|\overline{I}_L\right|$ della corrente circolante nell’induttanza è:

$$I_L = \frac{V_M}{\omega L}$$

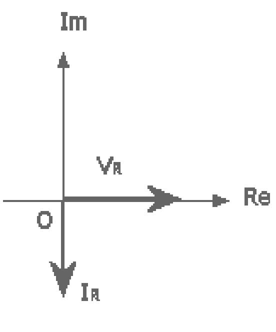
L’angolo tra asse reale e vettore corrente, ovvero lo sfasamento tra tensione (il cui vettore qui è parallelo all’asse reale) e corrente è:

$$\varphi = arctg(\frac{\mathrm{Im}\{\overline{I}_L\}}{\mathrm{Re}\{\overline{I}_L\}}) = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

Il fasore della corrente quindi può essere anche scritto come:

$$\overline{I}_L = \left|I_L\right| e^{j\varphi} = \frac{V_M}{\omega L} e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

Note in riferimento a: $\overline{V}_L = j\omega L \ \overline{I}_L$

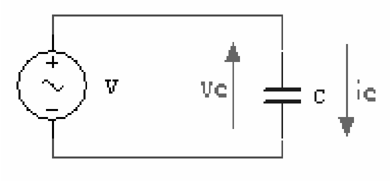



Possiamo pensare a j come ad un operatore matematico che, applicato alla corrente, la sfasa di 90° in anticipo rispetto alla tensione; di conseguenza, dal suo punto di vista, la tensione è in ritardo di 90° rispetto alla corrente.

Riferendoci al piano complesso, se moltiplichiamo per j le componenti del vettore, possiamo renderci conto dell’enunciato in maniera inequivocabile; nel dominio del tempo del resto abbiamo già fatto le considerazioni sull’integrale di una grandezza sinusoidale.

**CIRCUITO PURAMENTE CAPACITIVO**

Un circuito si dice puramente capacitivo quando in esso sono presenti solo condensatori. Lo schema elettrico di un condensatore alimentato da un generatore di tensione sinusoidale è il seguente:




Sia:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$$

Risolviamo innanzitutto il circuito nel dominio del tempo. Per il condensatore si ha:

$$i_C(t) = C\frac{dv_c}{dt}$$

Nel circuito di cui sopra abbiamo inoltre:

$$v_C(t) = v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$$

Quindi:

$$i_C(t) = C\frac{d}{dt}(V_M \cos(\omega t + \varphi)) = -C\omega V_M \sin(\omega t + \varphi) \equiv C\omega V_M \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

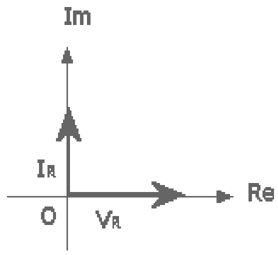
La derivata temporale di una grandezza sinusoidale (cosinusoidale) è una nuova grandezza sinusoidale (cosinusoidale) sfasata di + 90°. Nella fattispecie, tra tensione e corrente di un condensatore esiste uno sfasamento di 90°, con la corrente "in ritardo" rispetto alla tensione.

Risultati:

$$v_C(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$$

$$i_C(t) = \omega C V_M \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

*Tecnica fasoriale*




La legge di Ohm implica che, in regime sinusoidale, per il condensatore valga:

$$\bar{I}_C = j\omega C\ \bar{V}_C = j\omega C\bar{V}$$

Ovvero, per le proprietà del campo complesso:

$$\bar{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\bar{I}_C \equiv -j\frac{1}{\omega C}\bar{I}_C$$

La tensione è in anticipo di 90° rispetto alla corrente.

Quindi:

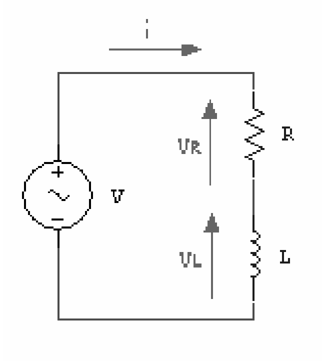
$$\bar{I}_C = j\omega C V_M e^{j\varphi}$$

Il risultato finale, nel dominio del tempo, sarà quindi:

$$i_C(t) = \mathrm{Re}\{\bar{I}_C e^{j\omega t}\} = -\omega C V_M \sin(\omega t + \varphi) \equiv \omega C V_M \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

**CIRCUITO RL SERIE**

Si dice circuito RL un circuito in cui compaiono solo resistori ed induttori. Lo schema elettrico di un RL serie alimentato da un generatore di tensione sinusoidale è il seguente:




Nel circuito RL si combinano i due effetti della resistenza del resistore $R$ e della reattanza induttiva[7] (modulo dell'impedenza dell'induttanza) della bobina $L$, per cui si ha uno sfasamento complessivo tra tensione e corrente che dipende da $R$ e da $Z_L$. L'impedenza di uno o più componenti elettrici, informalmente, è l'ostacolo che questi oppongono al passaggio della corrente alternata. L'impedenza totale vista dal generatore (i due componenti sono in serie e quindi le loro impedenze si sommano) è:

$$\mathcal{Z} = R + j\omega L$$

Il modulo $Z \equiv |\mathcal{Z}|$ dell'impedenza è, per il Teorema di Pitagora applicato al piano complesso:

$$Z = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\mathcal{Z}) + \mathrm{Im}^2(\mathcal{Z})};\ Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

Per la legge di Ohm:

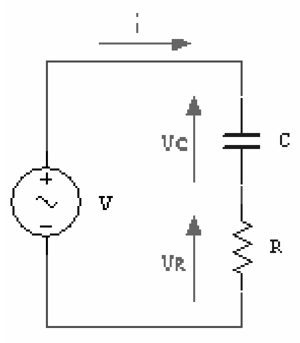
$$\bar{V} = \mathcal{Z}\bar{I} = (R + j\omega L)\bar{I}$$

in cui $\bar{I}$ è la corrente che attraversa la serie RL.

[7] Si nota come per frequenze nulle (a regime!), il modulo della reattanza induttiva sia nullo, ovvero l'induttore in tensione continua si comporta esattamente come un corto circuito, cioè come non vi fosse. Al contrario, più aumenta la frequenza della forzante, più l'induttanza si oppone al passaggio di corrente e diviene, al limite, un circuito aperto.

**CIRCUITO RC SERIE**

Si dice circuito RC un circuito in cui compaiono solo resistori e condensatori. Lo schema elettrico di un RC serie alimentato da un generatore di tensione sinusoidale è il seguente:




Nel circuito RC si combinano i due effetti della resistenza del resistore $R$ e della reattanza capacitiva[8] del condensatore $C$, per cui si ha uno sfasamento complessivo tra tensione e corrente che dipende da $R$ e da $\mathcal{Z}_C$. L'impedenza totale, vettore e modulo, vista dal generatore vale (i due componenti sono in serie e quindi le loro impedenze si sommano):

$$\mathcal{Z} = R + \frac{1}{j\omega C};\ Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

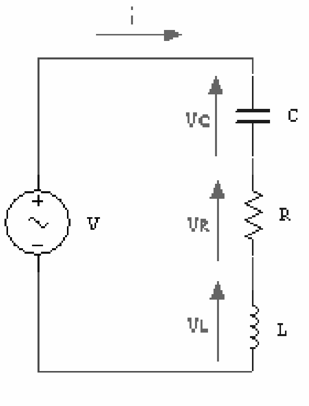
La legge di Ohm implica che:

$$\overline{V} = \mathcal{Z}\overline{I} = (R + \frac{1}{j\omega C})\overline{I}$$

[8] In tensione continua (a regime!) il condensatore si comporta da circuito aperto (impedenza infinita). Dualmente, più aumenta la frequenza della forzante, più il condensatore tende ad esser ininfluente.

**CIRCUITO RLC SERIE**

In un circuito RLC compaiono resistori, induttanze e condensatori. Lo schema elettrico di un RLC serie alimentato da un generatore di tensione sinusoidale è il seguente:




Nel circuito RLC si combinano gli effetti della resistenza del resistore $R$, della reattanza induttiva della bobina $L$ e della reattanza capacitiva del condensatore $C$, per cui si ha uno sfasamento complessivo tra tensione e corrente che dipende da $R$, $Z_L$ e $Z_C$. L'impedenza vista dal generatore (i tre componenti sono in serie e quindi le loro impedenze si sommano) vale:

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \equiv R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$

Il modulo dell'impedenza è:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

La legge di Ohm implica che:

$$\overline{V} = Z\overline{I} = (R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C})\overline{I} \equiv (R + j\omega L - \frac{j}{\omega C})\overline{I}$$

**RISONANZA – CENNI**

Poiché la corrente circolante in un circuito a forzante sinusoidale varia in dipendenza della pulsazione $\omega$, si ha risonanza quando la corrente raggiunge il suo valore massimo. La pulsazione $\omega_0$ cui corrisponde $I_{MAX}$ è detta pulsazione (o frequenza) di risonanza (o naturale), è caratteristica del particolare circuito preso in esame ed è ricavabile dalla soluzione dell'equazione differenziale che lo rappresenta o dalla tecnica fasoriale.

Quindi, quando la pulsazione della forzante (generatore sinusoidale) eguaglia la pulsazione naturale del circuito, questo entra in risonanza. In questa condizione, tensione e corrente sono in fase tra loro.

Ad esempio, considerando un circuito RLC serie alimentato da un generatore di tensione sinusoidale, l'impedenza della serie RLC vale, come visto poco sopra:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Il modulo dipende dalla pulsazione della tensione applicata. Per la legge di Ohm otteniamo:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Grandezza che dipende anch'essa dalla pulsazione $\omega$. La corrente è quindi massima per:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

**POTENZA – CENNI nel dominio del tempo**

Vogliamo calcolare la potenza che un'impedenza Z scambia col generatore in un circuito a regime sinusoidale, nel dominio del tempo.

Se ai capi dell'impedenza Z si hanno (con direzioni di riferimento associate, secondo consuetudine in Elettrotecnica):

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_2)$$

La potenza istantanea vale:

$$p(t) = v(t)i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_1) V_M \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Il suo valor medio in un periodo è:

$$P_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} p(t)dt = \frac{1}{2} I_M V_M \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \equiv V_{eff} I_{eff} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Dei tre componenti visti, solo il resistore trasforma l'energia in calore per effetto Joule.

***Autore**: ing. Marco Buratto.*

***Testo originale** tratto da www.scuolaelettrica.it, a cura del prof. ing. Pietro De Paolis.*

*Per ogni segnalazione riguardante commenti, comunicazioni di errori, omissioni, ingiurie varie….. e via dicendo, prego scrivere a: marco.buratto@tiscali.it. Contributi ben accetti. Cercansi traduttori.*